Cours de Mathématique - Statistique

Calcul Matriciel

F. SEYTE : Maître de conférences HDR en sciences économiques – Université de Montpellier I

M. TERRAZA : Professeur de sciences économiques – Université de Montpellier I

Module 1 : Notions de base sur les matrices

Unité 1 Définitions

1.1 Définition d'une matrice :

On appelle **matrice** un tableau rectangulaire de nombres écrits entre crochets et soumis à certaines règles d'opérations (que l'on verra ultérieurement).

Par exemple soit le système linéaire homogène suivant : $\begin{cases} 2x + 3y + 7z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \end{cases}$

La matrice associée à ce système est la suivante : $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Si on généralise l'écriture,

$$M_{(m,n)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ i \\ \dots \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & j & \dots & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & & & \dots \\ \dots & & & & a_{ij} & & \dots \\ \dots & \dots & & & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Les a_{ij} sont appelés les éléments de la matrice ; le premier indice i indique la ligne de l'élément, le deuxième indice j la colonne de l'élément.

a_{23} = $2^{ième}$ ligne $3^{ième}$ colonne

La matrice ayant m lignes et n colonnes est dite d'ordre (m,n) ou de dimension (m,n).

On peut aussi noter les matrices par des parenthèses ( ) ou des doubles barres : $\| \;\|$

NB : une matrice qui n'a qu'une seule ligne s'appelle matrice-ligne ou vecteur-ligne ; une matrice qui n'a qu'une seule colonne, s'appelle matrice-colonne ou vecteur-colonne.

Exemple de matrice-ligne : $A_{(1,3)}\ [1,0,3]$

Exemple de matrice-colonne : $B_{(3,1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

1.2 Matrices carrées

Une matrice qui a autant de lignes que de colonnes (m=n) est dite « matrice carrée » d'ordre n ou encore une « n-matrice carrée »

Exemple : $A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ou $B_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ sont des matrices carrées.

Dans une matrice carrée les éléments $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ sont appelés **éléments diagonaux**.

La somme des éléments diagonaux d'une matrice carrée A est appelée la « **trace de A** »

Par exemple pour A, la trace est de 3, pour B, la trace est de 4

1.3 Matrices égales

Deux matrices $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ sont dites égales (A=B) si et seulement si :

- elles sont de même ordre (même nombre de ligne et même nombre de colonnes)
- et si chaque élément de l'une est égale à l'élément correspondant de l'autre c'est-à-dire si $a_{ij} = b_{ij} \begin{cases} i = 1, ...m \\ j = 1, ...n \end{cases}$

ainsi, $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$ ne sont pas égales

$\begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}$ sont égales

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ne sont pas égales

L'égalité $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ signifie que : $\begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \\ c = 4 \end{cases}$

1.4 Matrices nulles

La matrice dont tous les éléments sont nuls est appelée la matrice nulle. Quand A est la matrice nulle, et lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur son ordre, on écrit A=0 au lieu de reproduire le tableau (m,n) où tous les éléments sont nuls.

1.5 Propriétés des matrices

- Matrice scalaire : $\Lambda_{(n,n)} = \lambda I_{(n,n)}$. Une matrice scalaire est le résultat du produit d'un scalaire (un nombre) par la matrice identité.

Par exemple $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ est une matrice scalaire car $A = 3I = 3 * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Matrice diagonale : elle ne contient des chiffres que sur la diagonale (cad sur les a_{ii}) et des 0 partout ailleurs :

$$A_{(n,n)} \sim a_{ij} \,/\, a_{ij} = a_{ii} \;\forall i = j$$
$$a_{ij} = 0 \;\forall i \neq j$$

exemple de matrice diagonale : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Remarque : une matrice scalaire est aussi une matrice diagonale.

- Soit $X = [x_1 \quad ... \quad x_n]$ alors $X_{(1,n)}X'_{(n,1)} = \sum x_i^2$

Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$ alors $X'_{(1,n)}X_{(n,1)} = \sum x_i^2$

Le produit d'un vecteur ligne par son transposé est égal à la somme des carrés de ses éléments :

Exemple :

Soit $X_{(1,3)} = [2 \quad 1 \quad 3]$ alors $X'_{(3,1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ et on obtient pour le produit :

$$X_{(1,3)}X'_{(3,1)} = 2*2+1*1+3*3 = 2^2+1^2+3^2 = \sum x_i^2$$

Unité 2 : Addition de matrices

2.1 Définition

Si $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ sont deux matrices (m,n), leur somme (respectivement leur différence) A+B (resp A-B) est définie par la matrice $C = [c_{ij}]$ dans laquelle tout élément est la somme (respectivement la différence) des éléments correspondants de A et B. Ainsi :

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$$

Exemple : soient $A_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ et $B_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$A+B_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+0 \\ 0-1 & 1+2 & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A-B_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-0 \\ 0+1 & 1-2 & 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

On peut faire la somme ou la différence de deux matrices que si elles sont de même ordre.

Par exemple on ne peut pas ajouter ou retrancher les matrices : $A(_{2,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ et

$B_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

2.2 Propriétés

Dans un ensemble de matrices de même dimension m,n l'addition possède les même propriétés que l'addition des réels :

- Associativité : si A,B,C sont 3 matrices de même dimension (m,n) alors $A+(B+C)=(A+B)+C$
- Elément neutre : La matrice F de dimension (m,n) dont tous les termes sont nuls est élément neutre : $A+F=F+A=A$. Elle est noté $[0]$
- Commutativité : Si A et B sont deux matrices quelconques de même dimensions (m,n) on a : $A+B=B+A$
- Opposée d'une matrice : si on change les signes de tous les éléments d'une matrice A, on obtient une matrice opposée B telle que : $A+B=B+A=[0]$ (matrice nulle)

Exemple : $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ $A+B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=[0]$

B s'appelle l'opposée de A ; toute matrice admet une opposée $A=[a_{ij}] \Rightarrow B[-a_{ij}]$

2.3 Exemple

Une entreprise a placé, pour vendre dans trois lieux A, B et C des distributeurs automatiques de sandwiches et de gâteaux dont les moyennes des ventes journalières sont données dans le tableau suivant :

	Sandwiches	Gâteaux
Lieu A	25	35
Lieu B	40	35
Lieu C	20	40

En utilisant la représentation matricielle, calculer le nombre de sandwiches et de gâteaux vendus par cette entreprise.

$M=[25 \quad 35] \quad N=[40 \quad 35] \quad P=[20 \quad 40]$

$M+N+P=[25+40+20 \quad 35+35+40]=[85 \quad 110]$

Donc l'entreprise a vendu 85 sandwiches et 110 gâteaux.

Unité 3 : Produit de matrices

3.1 Multiplication d'une matrice par un scalaire

On définit le produit d'une matrice A par un scalaire α comme la matrice obtenue en multipliant tous les éléments de la matrice A par α

Exemple :

$$3\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 12 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-1\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Remarques :

- Multiplier une matrice par le scalaire 1 ne la modifie pas
- Multiplier une matrice par le scalaire 0 la change en matrice nulle
- Multiplier une matrice par le scalaire -1 revient à la changer en son opposée.

3.2 Multiplication de deux matrices

1) Conditions de dimensions

La multiplication d'une matrice A par une matrice B exige une compatibilité des dimensions.

Le nombre de colonnes de la première matrice doit être égal au nombre de lignes de la seconde matrice.

Exemple :

Si :

$$A_{(3,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad D_{(1,3)} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \quad E_{(2,1)} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

alors :

Les produits $A_{(3,2)}E_{(2,1)}$, $B_{(3,3)}A_{(3,2)}$, $C_{(1,2)}E_{(2,1)}$, $D_{(1,3)}A_{(3,2)}$ et $D_{(1,3)}B_{(3,3)}$ sont possibles,

les produits $A_{(3,2)}B_{(3,3)}$, $A_{(3,2)}C_{(1,2)}$, $A_{(3,2)}D_{(1,3)}$, $B_{(3,3)}C_{(1,2)}$, $B_{(3,3)}E_{(2,1)}$, $C_{(1,2)}D_{(1,3)}$ sont impossibles

2) Dimension de la matrice produit

Si A est une matrice a m lignes et p colonnes, si B est une matrice a p lignes et n colonnes, le produit $A_{(m,p)}B_{(p,n)}$ est défini (puisque A a autant de colonnes que B a de lignes) et c'est une matrice C qui a m lignes et n colonnes

$$\boxed{A_{(m,p)}.B_{(p,n)} = C_{(m,n)}}$$

Le produit a autant de lignes que la 1ière matrice et autant de colonnes que la seconde matrice.

3.3 Produit d'une matrice-ligne par une matrice-colonne

Supposons une matrice-ligne A a p éléments (elle a donc p colonnes) : et une matrice-colonne qui a aussi p éléments (elle a donc p lignes) :

$$A_{(1,p)} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_p \end{bmatrix} \quad B_{(p,1)} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_p \end{bmatrix}$$

Le produit AB est défini puisque la condition de dimensions est satisfaite. Le produit aura 1 ligne (puisque A a une ligne) et 1 colonne (puisque B a une colonne)

Par définition le produit sera la matrice : $AB_{(1,1)} = [a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_pb_p]$

Exemples :

$$\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1x1+3x4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x+3y\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\5\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3+0-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

Exemple :

On représente par une matrice-ligne la commande d'un vendeur de boissons grossiste, il existe cinq produits : vin rouge, vin blanc, eaux gazeuses, bière, soda. Par exemple la matrice $A_{(1,5)} = \begin{bmatrix}30 & 10 & 50 & 50 & 40\end{bmatrix}$ représente la commande de 30 l de vin rouge, 10 l de vin blanc, 50 bouteilles d'eaux gazeuses, 50 bouteilles de bière, 40 bouteilles de soda.

Les prix unitaires peuvent être représentés par une matrice colonne : soit

$$B_{(5,1)} = \begin{bmatrix}1,4\\1,8\\0,9\\1,2\\0,9\end{bmatrix}$$

B indique que le prix du litre de vin rouge est de 1,4€, celui du litre de vin blanc 1,8€, celui d'une bouteille d'eau gazeuse 0,9€ …

Déterminer la valeur totale de la commande :

Pour trouver la valeur de la commande, on multiplie la matrice-ligne des quantités par la matrice-colonne des prix unitaires.

$$A_{(1,5)}B_{(5,1)} = \begin{bmatrix}30 & 10 & 50 & 50 & 40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1,4\\1,8\\0,9\\1,2\\0,9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}42+18+45+60+36\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}201\end{bmatrix}$$

La valeur totale de la commande sera de 201 euros.

3.4 Formule générale du produit

Soient A une matrice à m lignes et p colonnes et B une matrice à p lignes et n colonnes, le produit AB possède m lignes et p colonnes.

L'élément c_{ij} du produit AB, situé sur la $i^{ième}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne s'obtient en effectuant le produit de la $i^{ième}$ ligne de A par la $j^{ième}$ colonne de B, selon la règle de multiplication d'une matrice-ligne par une matrice colonne.

Exemples :

Exemple 1 :

$$A_{(2,3)} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\-1 & -1 & 2\end{bmatrix} \quad B_{(3,3)} = \begin{bmatrix}6 & 3 & 1\\0 & 0 & 2\\4 & 1 & -1\end{bmatrix} \rightarrow AB_{(2,3)} \rightarrow \text{2 lignes et 3 colonnes}$$

(le produit AB est possible car A a 3 colonnes et B a 3 lignes)

Produit de la première ligne de A par la première colonne de B

Produit de la première ligne de A par la troisième colonne de B

$$AB = \begin{bmatrix} 1x6+0x0+4x4 & 1x3+0x0+4x1 & 1x1+0x2+4x(-1) \\ -1x6-1x0+2x4 & -1x3-1x0+2x1 & -1x1-1x2+2x(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 7 & -3 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

<u>Exemple 2 :</u>

$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B_{(3,1)} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow AB_{(3,1)} = \begin{bmatrix} x-y+4z \\ 2x+2y+z \\ 3x+y+2z \end{bmatrix}$: notation abrégée d'un système linéaire qui s'interprète comme un simple produit de matrice.

<u>Exemple 3 :</u>

Soient $A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

alors : $AB_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 1x3-1x3 & 1x4-1x4 \\ -1x3+1x3 & -1x4+1x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

alors que : $BA_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 3x1+4x(-1) & 3x(-1)+4x1 \\ 3x1+4x(-1) & 3x(-1)+4x1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

On voit ici $AB \neq BA$ alors que pour la somme on avait $A+B = B+A$

3.5 Propriétés du produit de matrices

Si l'addition des matrices possède les mêmes propriétés que l'addition des nombres, on va voir qu'il n'en est pas tout à fait de même pour la multiplication.

<u>3.5.1 Non-commutativité</u>

- Si pour des nombres réels ab=ba, il n'en est pas de même pour des matrices

Si le produit AB est possible, cela n'entraîne pas que le produit BA le soit :

Exemple : soient $A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_{(2,1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$AB_{(2,1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$ alors que $B_{(2,1)}A_{(2,2)}$ n'est pas possible car la condition de dimension n'est pas respectée.

Généralisons les dimensions du produit de deux matrices :

Soient deux matrices A de dimension w lignes et x colonnes et B de dimensions y lignes et z colonnes, le produit AB est possible si x=y et sera de dimension w,z.

Si x=y alors le produit est possible

$A_{(w,x)}$ $B_{(y,z)}$

(w,z) sera la dimension de AB

Exemple : soit $C_{(4,3)}$ et $D_{(3,5)}$ on voit de suite que le produit CD est possible et que cette nouvelle matrice aura pour dimension $CD_{(4,5)}$

On voit également que le produit DC : $D_{(3,5)}\ C_{(4,3)}$ n'est pas possible

- Si les produits AB et BA sont possibles, ils peuvent ne pas avoir les mêmes dimensions

Exemple : $A_{(1,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B_{(3,1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$AB_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$ alors que $BA_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 12 \\ -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Enfin, même si les produits AB et BA sont possibles et ont la même dimension (ce qui se produit si A et B sont des matrices carrées de même dimension) ils peuvent être différents.

Exemple $A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$AB_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \quad BA_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Donc $AB \neq BA$ en général

Il peut cependant arriver que pour deux matrices carrés particulières, les produits AB et BA soient égaux. On dit que A et B sont commutables ou que A et B commutent

Exemple $A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

alors $AB_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ et $BA_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} = AB$ mais ceci reste un cas particulier !

En cas de non commutativité, on précisera en parlant d'un produit AB que :

A est multiplié à droite par B (ou est postmultiplié par B)

B est multiplié à gauche par A (ou est prémultiplié par A)

3.5.2 Associativité

Sous réserve que les conditions de dimensions soient satisfaites, si A, B, C sont des matrices quelconques alors, $A(BC) = (AB)C$

Exemple : soient $A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B_{(3,1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad C_{(1,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Conditions et dimensions du produits (AB)C : $\left(A_{(3,3)}B_{(3,1)}\right)C_{(1,3)} \to D_{(3,1)}C_{(1,3)} \to E_{(3,3)}$

$$(AB)_{(3,1)}C_{(1,3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 26 & 13 & 39 \\ 28 & 14 & 42 \end{bmatrix}$$

$$A_{(3,3)}BC_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 8 & 4 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 26 & 13 & 39 \\ 28 & 14 & 42 \end{bmatrix}$$

3.5.3 Distributivité

Sous réserve que les conditions de dimensions soient satisfaites, si A, B, C sont 3 matrices quelconques on a

$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(B+C)A = BA + CA$$

Exemple

$A_{(1,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad C_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$$(B+C)_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A(B+C)_{(1,3)} = \begin{bmatrix} 8 & 13 & 17 \end{bmatrix}$$

$$AB_{(1,3)} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad AC_{(1,3)} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow AB + AC = \begin{bmatrix} 8 & 13 & 17 \end{bmatrix}$$

3.5.4 Produit par une matrice nulle

La définition du produit rend évident le fait que si l'une des matrices d'un produit est une matrice nulle, le produit est une matrice nulle.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.5.5 Matrices identités

Ce sont des matrices carrées avec uniquement des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs

Ex : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice identité de dimension (p,p) est dite matrice identité d'ordre p ou matrice unité d'ordre p. La multiplication d'une matrice A, à gauche ou à droite par une matrice identité ne modifie par la matrice A.

Ex : multiplication à gauche par une matrice identité :

$$A_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow BA_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplication à droite par une matrice identité :

$$A_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3.5.6 Non régularité

Soients les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cela montre que : un produit de matrices peut être nul sans qu'aucun des facteurs le soit.

Soients les matrices :

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad AD = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ On voit que AC=AD et pourtant $C \neq D$

On ne peut donc pas « simplifier » une égalité de matrice en divisant ses deux membres par une même matrice comme en algèbre linéaire.

L'algèbre des matrices présente donc avec l'algèbre ordinaire :

- Des ressemblances : associativité, commutativité pour l'addition, associativité de la multiplication, distributivité.
- Des différences : non commutativité, existence de produits nuls à facteurs non nuls, impossibilité de « simplifier » une égalité

Unité 4 : Transposition de matrice

4.1 Définition

La transposée A' d'une matrice A est la matrice déduite de A en échangeant les lignes et les colonnes

Ex : $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$A_{(3,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \to A'_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to A' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Si une matrice a m lignes et n colonnes, sa transposée a n lignes et m colonnes

$$A_{(m,n)} \to A'_{(n,m)}$$

D'où les propriétés suivantes :

- La transposée de la transposée d'une matrice A est : A donc $\boxed{(A')'=A}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \to (A')' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- la transposée de la somme de deux matrices est la somme de leurs transposées.

$\boxed{(A+B)' = A'+B'}$

Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to A+B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 5 & 9 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \to (A+B)' = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A'+B' = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} = (A+B)'$$

- La transposée d'un produit de deux matrices est le produit des transposées dans l'ordre inverse

$\boxed{(AB)' = B'A'}$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 13 \\ 13 & 30 & 28 \\ 5 & 10 & 14 \end{bmatrix} \to (AB)' = \begin{bmatrix} 4 & 13 & 5 \\ 12 & 30 & 10 \\ 13 & 28 & 14 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \to B'A' = \begin{bmatrix} 4 & 13 & 5 \\ 12 & 30 & 10 \\ 13 & 28 & 14 \end{bmatrix} = (AB)'$$

Généralisation : $\boxed{(A_1 A_2 A_3 ... A_n)' = A'_n A'_{n-1} ... A'_3 A'_2 A'_1}$

4.2 Matrices symétriques – antisymétriques

Certaines matrices carrées présentent des particularités intéressantes :

- Une matrice symétrique est une matrice égale à sa transposée :

$[A] = [a_{ij}]$ est symétrique $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$

Ex : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A = A'$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow B' = B$

- une matrice antisymétrique est une matrice opposée de sa transposée.

ex $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ opposée de $A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$

$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ $B' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ opposée de $B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = B$

Les éléments de la diagonale principale d'une matrice antisymétrique sont nuls.

- Soit A une matrice carrée quelconque, alors :

  A+A' est symétrique,

  A-A' est antisymétrique.

5. Exemple

Une entreprise a placé dans deux lieux différents L1 et L2 des distributeurs automatiques de gâteaux et de sodas dont les moyennes des ventes journalières sont données dans le tableau 1. L'entreprise sous-traite la fabrication des gâteaux et des sodas auprès de deux fournisseurs dont les prix de vente, exprimés en euros, sont donnés dans le tableau 2.

Abréviations : L1=Lieu 1 S=Sodas

L2=Lieu 2 G=gâteau

F1=Fournisseur1 A=Matrice des quantités vendues

F2=Fournisseur2 B=Matrice des prix

Matrice des quantités vendues

	S	G
L1	25	35
L2	40	35

Tableau 1

Matrice des prix

	F1	F2
S	1,5	1,6
G	1	0,9

Tableau 2

Calculer le coût global de chaque distributeur en fonction du fournisseur en utilisant la représentation matricielle.

Soient A et B, les deux matrices représentant respectivement les quantités vendues et les prix :

$A = \begin{bmatrix} 25 & 35 \\ 40 & 35 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 1{,}6 \\ 1 & 0{,}9 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 25\times1{,}5+35\times1 & 25\times1{,}6+35\times0{,}9 \\ 40\times1{,}5+35\times1 & 40\times1{,}6+35\times0{,}9 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 72{,}5 & 71{,}5 \\ 95 & 95{,}5 \end{bmatrix}$$

- 72,5 : coût total de fabrication des produits vendus dans le distributeur placé dans le lieu 1, s'il est alimenté exclusivement par le fournisseur 1.
- 71,5 : coût total de fabrication des produits vendus dans le distributeur placé dans le lieu 1, s'il est alimenté exclusivement par le fournisseur 2.

Le produit matriciel AB représente les coûts de fabrication en fonction des fournisseurs.

Supposons maintenant que :

- la répartition G-S, c'est-à-dire que la matrice A soit différente et qu'elle soit la transposée de A.
- les prix de vente soient aussi différents et que la matrice les représentant soit la transposée de B.

Calculer le coût global de chaque distributeur en fonction du fournisseur en utilisant les propriétés des matrices transposées.

$$A'B' = (BA)'$$

$$A' = \begin{bmatrix} 25 & 40 \\ 35 & 35 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 1 \\ 1{,}6 & 0{,}9 \end{bmatrix}$$

$$A'B' = \begin{bmatrix} 101{,}5 & 61 \\ 108{,}5 & 66{,}5 \end{bmatrix}$$

$$(BA) = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 1{,}6 \\ 1 & 0{,}9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 & 35 \\ 40 & 35 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 101{,}5 & 108{,}5 \\ 61 & 66{,}5 \end{bmatrix}$$

Vérification : $(BA)' = A'B'$

Résumé :

$A_{(m,n)}$ m lignes

n colonnes

$$A_{(m,n)} + B_{(m,n)} = C_{(m,n)}$$
$$= \left[a_{ij} \pm b_{ij}\right]$$

$A + (B + C) = (A + B) + C$ associativité

$A + B = B + A$ commutativité

$A + B = [0]$ avec B : matrice opposée de A

$A_{(m,p)} \cdot B_{(p,n)} = C_{(m,n)}$

$AB \neq BA$ en général

$A(BC) = (AB)C$

$$\begin{aligned} A(B+C) &= AB + AC \\ (B+C)A &= BA + CA \end{aligned} \quad \text{distributivité}$$

$$A_{(m,n)} \rightarrow A'_{(m,n)} \qquad (A')' = A$$

$$(A+B)' = A' + B'$$
$$(AB)' = B'A'$$

Matrice symétrique $A = A'$

antisymétrique : matrice opposée de sa transposée B=opposée B'